Esercizi di E.T.I.

Lezioni I–III

Paolo Giordano, mtr. 523677

INDICE

1 LEZIONE I

Esercizio 1: Sia $(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$, dimostrare che

$$((a,b) = (a',b')) \iff ((a = a') \wedge (b = b'))$$

Soluzione. Dimostriamo separtamente le due implicazioni:

$\Longrightarrow$ Se $(a = a') \wedge (b = b')$ allora è evidente che $\{a\} = \{a'\}$ e che $\{a,b\} = \{a',b'\}$, quindi banalmente i due insiemi $\{\{a\},\{a,b\}\}$ e $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ sono uguali per il principio di estensionalità.

$\Longleftarrow$ Se $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$ allora per il principio di estensionalità questi due insiemi hanno gli stessi elementi, quindi ci sono due eventualità:

- $\{a\} = \{a'\}$, che implica per il principio di estensionalità che $a = a'$. Quali sono le possibilità per $\{a,b\}$? $\{a,b\}$ ha due alternative:
  - $\{a,b\} = \{a'\}$ che per estensionalità implica $a = a' = b$, ma quindi $\{a',b'\}$ appartiene ad $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$, cioè $\{a',b'\} = \{a\}$ che implica $a' = a = b'$. In questa eventualità quindi si ha $a = b = a' = b'$.
  - $\{a,b\} = \{a',b'\}$, e ancora una volta le possibilità sono due: $b = a' = a$, e si ricade nel caso precedente, oppure $b = b'$, dal quale si conclude che $a = a' \wedge b = b'$
- $\{a\} = \{a',b'\}$ che per estensionalità implica che $a' = a = b'$, che ci fa cadere in un caso analogo a quanto visto precedentemente, concludendo che $a = a' = b = b'$.

In ogni caso concludiamo che se $(a,b) = (a',b')$ allora $a = a' \wedge b = b'$.

□

2 LEZIONE II

ESERCIZIO 2: Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti:

1. AC.

2. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti allora esiste una funzione "di scelta" con dominio $\mathcal{F}$, cioè una funzione f tale che $\forall A \in \mathcal{F}, f(A) \in A$.

3. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti a due a due disgiunti, allora esiste un insieme di scelta X, cioè tale che $\forall A \in \mathcal{F}, X \cap A$ contiene esattamente un elemento.

4. Ogni funzione suriettiva $f\colon A \to B$ ammette un'inversa destra, cioè una funzione $g\colon B \to A$ tale che $f \circ g\colon B \to B$ sia la funzione identica.

Soluzione.

$1 \iff 2$ Dato che il prodotto cartesiano infinito è stato definito come l'insieme delle funzioni da I ad $\{A_i\}_{i\in I}$ tali che $f(i) \in A_i$, dire che esiste una funzione di scelta è come dire che il prodotto cartesiano è non vuoto e dire che il prodotto cartesiano è non vuoto è come dire che esiste una funzione di scelta.

$2 \implies 3$ Sia $\mathcal{F}$ la mia famiglia di insiemi e sia f la funzione di scelta garantita dal fatto 2, allora l'insieme $X = \{ f(A) \mid A \in \mathcal{F} \}$ è il mio insieme di scelta.

$3 \implies 4$ Sia $f\colon A \to B$ una funzione suriettiva, definiamo $\forall b \in B$ l'insieme $A_b = f^{-1}(b) = \{ a \in A \mid f(a) = b \}$. La famiglia $\{A_b\}_{b\in B}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti a due a due disgiunti, quindi applicando il punto 3 sappiamo che esiste un insieme di scelta X. Definisco ora la funzione $g\colon B \to A$ tale che $g(b) = X \cap A_b$. Che g sia una funzione deriva dal fatto che $X \cap A_b$ ha un solo elemento, ed è facile vedere che $f(g(b)) = b$. Osserviamo inoltre che la funzione g è iniettiva, poiché due elementi distinti nel suo dominio sono due rappresentanti di due distinti A_b e quindi le loro immagini non possono coincidere.

$4 \implies 1$ Sia $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ una famiglia di insiemi, definisco $f\colon I \times \{A_i\}_{i\in I} \to I$ tale che $\forall a \in A_i \quad f(i,a) = i$. Essendo gli A_i non vuoti, la funzione f è sicuramente suriettiva, quindi per il punto 4 ammette inversa destra $\hat{g}\colon I \to I \times \{A_i\}_{i\in I}$ tale che $\hat{g}(i) = (i,a)$ per un unico $a \in A_i$. La funzione $g\colon I \to \{A_i\}_{i\in I}$, tale che $g(i) = a$ dove a è quell'unico elemento di A_i tale che $\hat{g}(i) = (i,a)$, è quindi quella funzione che mi rende il prodotto cartesiano infinito non vuoto. $\square$

ESERCIZIO 3: Dimostrare che, per ogni famiglia $\langle A_{ij} \mid (i,j) \in I \times J\rangle$,

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{ij} = \bigcup_{f\colon I\to J}\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)} \iff \text{AC}$$

Soluzione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni:

$\Longrightarrow$ Sia $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti e definiamo $\left\langle Z_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in I \times \bigcup_{i \in I} A_i \right\rangle$ (d'ora in avanti indicheremo con J l'unione $\bigcup_{i \in I} A_i$) dove

$$Z_{i,j} = \begin{cases} \{1\} & \text{se} \quad j \in A_i \\ \{0\} & \text{se} \quad j \notin A_i \end{cases}$$

Essendo gli A_i non vuoti, sicuramente $\{1\} \in \bigcup_{j \in J} Z_{i,j}$ per ogni i, quindi

$$\{1\} \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} Z_{i,j}.$$

Ne consegue che

$$\{1\} \in \bigcup_{f\colon I \to J} \bigcap_{i \in I} Z_{i,f(i)} \quad ,$$

cioè esiste una $f\colon I \to J$ tale che $\{1\} \in \bigcap_{i \in I} Z_{i,f(i)}$ per ogni $i \in I$, cioè una f per cui $Z_{i,f(i)} = \{1\}$ per ogni i. Per come abbiamo definito $Z_{i,j}$ concludiamo che $f(i) \in A_i$ per ogni i, e quindi che f è una funzione di scelta. Dall'equivalenza tra l'esistenza di una funzione di scelta e l'Assioma di scelta otteniamo la tesi.

$\Longleftarrow$ Supponiamo vero l'assioma di scelta, nella forma equivalente che ci garantisce una funzione di scelta, e dimostriamo le due inclusioni:

- $\subseteq$ Sia $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}$, allora per ogni $i \in I$, $x \in \bigcup_{j \in J} A_{ij}$, ovvero esiste almeno un j tale che $x \in A_{ij}$. Definiamo per ogni $i \in I$ l'insieme $B_i = \left\{ j \in J \,\middle|\, x \in A_{ij} \right\} \subseteq J$. Applicando l'assioma di scelta alla famiglia $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ possiamo dire che esiste una funzione di scelta f; è allora chiaro, con tale f, che $x \in \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$, e quindi che

  $$x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} \Longrightarrow x \in \bigcup_{f\colon I \to J} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$$

- $\supseteq$ Questo contenimento è sempre valido e non necessita dell'assioma della scelta per essere dimostrato.
  Se $x \in \bigcup_{f\colon I \to J} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$ allora esiste una $f\colon I \to J$ tale che $x \in \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$ cioè tale che $x \in A_{i,f(i)}$ per ogni $i \in I$. Dato che $A_{i,f(i)} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_{ij}$ per ogni $i \in I$, si deduce che $\bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} \subseteq \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}$, da cui:

  $$x \in \bigcup_{f\colon I \to J} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} \Longrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}$$

$\square$

ESERCIZIO 4: Dimostrare che $|A| = |B| \Longrightarrow |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$

Soluzione. Sappiamo che esiste una $f\colon A \to B$ bigettiva, quel che vogliamo fare è costruire una $\hat{f}\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ bigettiva. Per farlo, la maniera più naturale è quella di definire, $\forall S \subseteq A$, $\hat{f}(S) = \{ f(s) \mid s \in S \}$. Dimostriamo quindi che questa applicazione è bigettiva:

INIETTIVITÀ Se $S_1, S_2 \subseteq A$ e $S_1 \neq S_2$, allora possiamo supporre senza perdita di generalità che esista $s \in S_1$ tale che $s \notin S_2$; da questo deduciamo che per tale s $f(s) \in \hat{f}(S_1)$ e $f(s) \notin \hat{f}(S_2)$. Concludiamo che $S_1 \neq S_2 \Longrightarrow \hat{f}(S_1) \neq \hat{f}(S_2)$.

SURGETTIVITÀ Sia $T \subseteq B$, $\forall t \in T \quad \exists! a \in A \quad$ tale che $\quad f(a) = t$. Se considero quindi $S = \{\, a \in A \mid f(a) = s, s \in S \,\} \subseteq A$ è evidente che $\hat{f}(S) = T$.

$\square$

3 LEZIONE III

Esercizio 5: Siano A, A', B, B' insiemi tali che $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$, allora:

1. $|A \cup B| = |A' \cup B'|$ se $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$
2. $|A \times B| = |A' \times B'|$
3. $|Fun(A, B)| = |Fun(A', B')|$

Soluzione. Per ognuno dei tre casi costruiamo delle funzioni tra i due insiemi e dimostriamo che sono bigettive. Chiamiamo $f \colon A \to B$ la funzione bigettiva tale che $|A| = |A'|$ e $g \colon B \to B'$ la funzione bigettiva tale che $|B| = |B'|$.

1. Sia $h \colon A \cup B \to A' \cup B'$ definita come

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in A \\ g(x) & \text{se} \quad x \in B \end{cases}$$

allora h è iniettiva perchè f e g lo sono e $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, ed è surgettiva perchè f e g lo sono.

2. Sia $h \colon A \times B \to A' \times B'$ così definita:

$$h(x, y) = (f(x), g(x)).$$

h è iniettiva perchè se $(a, b) \neq (a', b')$ allora, dall'iniettivitá di f e g, $(f(a), g(b)) \neq (f(a'), g(b'))$. La surgettivitá segue banalmente dalla surgettività di f e g.

3. Sia $\psi \colon Fun(A, B) \to Fun(A', B')$ dove $\psi(z) = z' \colon A' \to B'$ e, se $z(a) = b$, allora $z'(f(a)) = g(b)$. Dimostriamo che ψ è iniettiva e surgettiva:

INIETTIVITÁ Siano $z, h \in Fun(A, B)$ due funzioni diverse, ovvero tali per cui $\exists a \in A$ tale che $z(a) = b \neq b' = h(a)$, allora sull'elemento $f(a)$ si ha che $z'(f(a)) = g(b) \neq g(b') = h'(f(a))$, dove questa disuguaglianza deriva dall'iniettivitá di g.
Quindi $z \neq h \Longrightarrow \psi(z) = z' \neq h' = \psi(h)$.

SURGETTIVITÁ Sia $h \in Fun(A', B')$, e sia $z \in Fun(A, B)$ definita come

$$z(f^{-1}(a')) = g^{-1}(b'), \quad \text{con} \quad a' \in A' \wedge b' \in B'.$$

Allora è evidente, per come è costruita ψ, che $\psi(z) = h$. Inoltre la funzione z cosí definita ha perfettamente senso, perchè essendo f e g due bigezioni le loro inverse "coprono" interamente A e B.

□

Esercizio 6: Siano A, B, C tre insiemi, allora:

1. $|(A^B)^C| = |A^{B\times C}|$
2. $|A^B \times A^C| = |A^{B\cup C}|$ se $B \cap C = \emptyset$

Soluzione. Come per l'esercizio 5, scriviamo le funzioni e verifichiamo che sono iniettive e surgettive:

1. Sia f una generica funzione da C ad A^B e sia g la funzione da B in A tale che $g = f(c)$ per un certo $c \in C$. Sia $\psi\colon (A^B)^C \to A^{B\times C}$ la funzione così definita:

$$\psi(f) = h \quad \text{tale che} \quad h(b,c) = g(b), \quad \text{con} \quad g = f(c)$$

Dimostriamo che è iniettiva e surgettiva:

INIETTIVITÀ Se f, z sono due funzioni diverse da C in A^B, allora esiste $\hat{c} \in C$ tale che $f(\hat{c}) = p \neq q = z(\hat{c})$, quindi p e q sono due funzioni distinte da B in A, ovvero esiste un $\hat{b} \in B$ tale che $p(\hat{b}) = a_1 \neq a_2 = q(\hat{b})$. Ne deduciamo, considerando $\psi(f) = h_1$ e $\psi(z) = h_2$ e gli elementi $\hat{c}$ e $\hat{b}$ visti in precedenza, che $h_1(\hat{b}, \hat{c}) = p(\hat{b}) = a_1 \neq a_2 = q(\hat{b}) = h_2(\hat{b}, \hat{c})$. Cioò dimostra che

$$f \neq z \Longrightarrow \psi(f) \neq \psi(z)$$

SURGETTIVITÀ Sia $\varphi\colon B \times C \to A$, fisso $c \in C$ e considero la funzione $g_c\colon B \to A$ così definita:

$$g_c(b) = \varphi(b, c)$$

Sia inoltre $f\colon C \to A^B$ la funzione che $\forall c \in C$ ha immagine g_c ($f(c) = g_c$). È facile vedere, da come è definita ψ, che $\psi(f) = \varphi$.

2. Siano $f\colon B \to A$ e $g\colon C \to A$ due funzioni. Sia $h\colon B \cup C \to A$ una funzione. Sia $\psi\colon A^B \times A^C \to A^{B\cup C}$ così definita:

$$\psi(f, g) = h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in B \\ g(x) & \text{se} \quad x \in C \end{cases}$$

Che ψ sia una funzione ben definita ci è garantito dal fatto che $A \cap B = \emptyset$. Dimostriamo che è bigettiva:

INIETTIVITÀ Consideriamo $(f,g) \neq (f',g')$. Senza perdità di generalità possiamo supporre $f \neq f'$, ovvero che esista $\hat{b} \in B$ tale che $f(\hat{b}) \neq f'(\hat{b})$. Allora $\psi(f,g)(\hat{b}) = h(\hat{b}) = f(\hat{b}) \neq f'(\hat{b}) = h'(\hat{b}) = \psi(f',g')(\hat{b})$. Con questo concludiamo che

$$(f,g) \neq (f',g') \Longrightarrow \psi(f,g) \neq \psi(f',g')$$

SURGETTIVITÀ Data $h\colon B \cup C \to A$, basta considerare la $f\colon B \to A$ tale che $f(b) = h(b)$ e la $g\colon C \to A$ tale che $g(c) = h(c)$. È evidente che $\psi(f,g) = h$.

□

Esercizio 7: Dimostrare, senza l'assioma di scelta, che se $A \subseteq \mathbb{N}$ è un insieme infinito, allora A è numerabile.

Soluzione. Definiamo induttivamente la funzione $f\colon \mathbb{N} \to A$ bigettiva:

$$f(1) = min\{A\}$$
$$f(n+1) = min\{A \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}\}$$

L'esistenza del minimo mi è garantita senza l'assioma di scelta. Che la funzione sia iniettiva e surgettiva è ovvio, e che sia da tutto $\mathbb{N}$ ci è garantito dal fatto che A è infinito. □

Esercizio 8: Se esiste $f\colon \mathbb{N} \to A$ suriettiva, allora A è finito oppure numerabile.

Soluzione. Se A è finito allora abbiamo concluso; supponiamo allora A infinito. Dalle forme equivalenti dell'assioma della scelta sappiamo che esiste un'inversa destra di f, chiamiamola $g\colon \mathbb{N} \to A$. Evidentemente $g(A) \subseteq \mathbb{N}$, ed essendo le cardinalità $|g(A)| = |A|$ infinite, dall'esercizio precedente sappiamo che $g(A)$ è infinito numerabile, e quindi anche A è infinito numerabile poiché in bigezione con un insieme infinito numerabile (g è una bigezione poiché è iniettiva [1] e considerata come funzione in $g(A)$ anche surgettiva).

□

Esercizio 9: Se A e B sono insiemi numerabili, allora $A \cup B$ è un insieme numerabile.

Soluzione. Sappiamo che esistono $f\colon \mathbb{N} \to A$ e $g\colon \mathbb{N} \to B$ biunivoche. Consideriamo allora la funzione $\psi\colon \mathbb{N} \times \{0,1\} \to A \cup B$ così definita:

$$\psi(n,0) = f(n) \wedge \psi(n,1) = g(n)$$

È facile vedere che $|\mathbb{N} \times 0,1| = |\mathbb{N}|$ (albergo di Hilbert). Questa funzione è suriettiva da $\mathbb{N}$ ad $A \cup B$, e l'unione è infinita, essendo A e B infiniti, allora applicando i risultati degli esercizi 7 e 8 si conclude che $A \cup B$ è numerabile.

□

1 Vedi esercizio 2